No. of Printed Pages : 4

F R

MOR-12

2012

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घण्टे] *[पूर्णांक : 200*

Time allowed : Three Hours] *[Maximum Marks : 200*

नोट : (i) *इस प्रश्न-पत्र में **दो** खण्ड **अ** तथा **ब** हैं । प्रत्येक खण्ड में **चार** प्रश्न हैं । किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के इस प्रकार उत्तर दीजिए कि प्रत्येक खण्ड से कम से कम **दो** प्रश्न हों ।*

(ii) ***सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं । (प्रत्येक प्रश्न 40 अंक)*

(iii) ***एक** प्रश्न के सभी भागों का उत्तर अनिवार्यतः एक साथ दिया जाय ।*

(iv) *केवल नॉन प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर ही अनुमन्य है ।*

Note : (i) *This question paper has **two** Sections 'A' and 'B'. Every section has **four** questions. Attempt any **five** questions such that at least **two** questions should be from every section.*

(ii) ***All** questions carry equal marks of **40** each.*

(iii) *The part of the same question must be answered together.*

(iv) *Only non-programmable calculators are allowed.*

खण्ड – अ

SECTION – A

1. (अ) तीन शहरों X, Y और Z में किसी कम्पनी के एक-एक स्टोर हैं । X तथा Y परस्पर 320 किमी. की दूरी पर हैं तथा Z की X व Y से दूरी 200 किमी. है । X तथा Y से बराबर दूरी पर एक गोदाम इस प्रकार बनाया जाना है कि गोदाम से प्रत्येक शहर के स्टोर का आवागमन समय कम से कम हो । गोदाम को कहाँ बनाया जाएगा ? **20**

(ब) उन गोलों की समीकरण निकालिए, जो कि वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ से होकर जाते हैं तथा समतल $4x + 3y = 15$ को स्पर्श करते हैं । **20**

(a) A firm has a branch store in each of the three cities X, Y and Z. X and Y are 320 km. apart from each other and Z is 200 km. from X and Y both. A godown has to be built, equidistant from X and Y, such that the time of transportation from the godown to each city is minimum. Where should the godown be built ?

(b) Find the equations of the spheres which pass through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touch the plane $4x + 3y = 15$.

2. (अ) सदिश विश्लेषण का प्रयोग करके, दो अचर संख्याओं a व b का मान निकालिए, जबकि यह दिया है कि दो सतहें $ax^2 - byz = (a + 2)x$ तथा $4x^2y + z^3 = 4$ आपस में एक दूसरे को बिन्दु (1, – 1, 2) पर लम्बवत् काटती हैं । **20**

(ब) अवकल समीकरण $(D^2 - 3D + 2)y = 3 \sin 2x$ का हल ज्ञात कीजिए । **20**

(a) Find the constants a and b, using vector analysis, so that the surface $ax^2 - byz = (a+2)x$ is orthogonal to the surface $4x^2y + z^3 = 4$ at the point $(1, -1, 2)$.

(b) Solve the differential equation $(D^2 - 3D + 2)y = 3 \sin 2x$.

3. (अ) एक शंकु को एक अर्द्धगोले के ऊपर इस प्रकार रखा जाता है कि दोनों के आधार समान हो जाते हैं । इस प्रकार से बनी हुई वस्तु एक खुरदुरी क्षैतिज मेज पर रखी हुई है । अर्द्धगोला मेज के सम्पर्क में हैं । इस वस्तु के संतुलन के स्थाई होने की दशा में सिद्ध कीजिए कि शंकु की अधिकतम ऊँचाई, अर्धगोले की त्रिज्या की $\sqrt{3}$ गुना होगी । **20**

(ब) किसी निश्चित बिन्दु O से a दूरी पर स्थित कोई कण विश्राम से O की ओर गतिमान है । जो बल कण को O की ओर खींच रहा है वह दूरी प्रति इकाई द्रव्यमान का μ गुना है । जिस माध्यम में कण गतिमान है उसका प्रतिरोध कण के वेग प्रति इकाई द्रव्यमान के वर्ग का k गुना है । जब कण O से x दूरी पर है, तो सिद्ध कीजिए कि इसके वेग का वर्ग होगा

$$\frac{\mu}{k}\left[x - a\,e^{2k(x-a)} + \frac{1}{2k}\left\{1 - e^{2k(x-a)}\right\}\right]$$ **20**

(a) A body consisting of a cone and a hemisphere on the same base, rests on a rough horizontal table, the hemisphere being in contact with the table. Show that the greatest height of the cone so that the equilibrium may be stable, is $\sqrt{3}$ times the radius of the hemisphere.

(b) A particle moves from rest at a distance 'a' from a fixed point O under the action of a force towards O equal to μ times the distance per unit of mass. If the resistance of the medium in which it moves be k times the square of the velocity per unit mass, show that the square of its velocity when it is at a distance x from O, is

$$\frac{\mu}{k}\left[x - a\,e^{2k(x-a)} + \frac{1}{2k}\left\{1 - e^{2k(x-a)}\right\}\right]$$

4. (अ) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए समस्त आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए । **20**

(ब) सिद्ध कीजिए कि प्रथम और द्वितीय प्रकार के क्रिस्टोफल संकेत टेन्सर राशियाँ नहीं हैं । **20**

अथवा

समाक्ष वृत्तों का एक तन्त्र पानी में इस प्रकार डूबा है कि केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा एक निश्चित गहराई पर है । सिद्ध कीजिए कि पूर्णत: डूबे हुए वृत्तीय क्षेत्रों के दाब-केन्द्र, एक परवलय पर स्थित हैं ।

(a) Find all the eigen values and eigen vectors of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Show that Christoffel symbols (of the first and second kind) are not tensor quantities.

OR

A system of coaxial circles is immersed in water with the line of centres at a given depth. Prove that the centres of pressure of those circular areas which are completely immersed, lie on a parabola.

खण्ड – ब

SECTION – B

5. (अ) इन शब्दों को परिभाषित कीजिए : परमुटेशन, सम और विषम परमुटेशन, ट्रान्सपोजीशन, चक्रीय परमुटेशन ।

4 संकेतों 1, 2, 3, 4 पर समस्त परमुटेशन को लिखिए । E_p व O_p, क्रमश: सम व विषम परमुटेशन के समुच्चय हैं । E_p व O_p के समस्त अवयवों को लिखिए । **20**

(ब) प्रांत $\left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$ के अन्तर्गत I का मान निकालिए जहाँ पर $I = \iiint (a^2b^2c^2 - b^2c^2x^2 - c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy\, dz$ है । **20**

(a) *Define the terms : permutation, even and odd permutation, transposition, cyclic permutation.*

Write down all the permutations on 4 symbols 1, 2, 3, 4. Let E_p and O_p be the sets of even and odd permutations respectively. Write down all the elements of E_p and O_p.

(b) Evaluate $I = \iiint (a^2b^2c^2 - b^2c^2x^2 -- c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy\, dz$ taken throughout the domain

$$\left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}.$$

6. (अ) कन्टूर समाकलन विधि से सिद्ध कीजिए **20**

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta - n\theta)d\theta = \frac{2\pi}{n!},$$ n पूर्णांक है ।

(ब) आंशिक (पार्शियल) अवकल समीकरण $2y(z-3)p + (2x - z)q = y(2x - 3)$ द्वारा निरूपित उस सतह का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ से होकर जाती है । **20**

(a) By the method of Contour integration, prove that

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta - n\theta)d\theta = \frac{2\pi}{n!},$$ n being a positive integer.

(b) Find the equation of the surface represented by the partial differential equation $2y(z - 3)p + (2x - z)q = y(2x - 3)$, which passes through the circle $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

7. (अ) दर्शाइए कि समीकरण $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ द्वारा निरूपित और M द्रव्यमान वाले क्षेत्र का, अपने अक्ष के सापेक्ष मोमेन्ट ऑफ इनर्शिया

$\frac{1}{48} M a^2(3\pi - 8)$ है । **20**

(ब) द्विआयामीय गति में यदि स्ट्रीम रेखाएँ, कन्फोकल संनाभि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ हों, तो दर्शाइए कि स्ट्रीम फलन ψ है $\psi = A \log(\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{b^2+\lambda}) + B$

जहाँ A, B स्थिर हैं । **20**

(a) Show that the moment of inertia of the area of mass M, bounded by $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ about its axis is

$\frac{1}{48} M a^2(3\pi - 8)$.

(b) In two-dimensional motion show that, if the stream lines are confocal ellipses $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$, then the stream function is $\psi = A \log(\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{b^2+\lambda}) + B$, where A and B are constants.

8. (अ) दिखाइए कि $f(1) = \sqrt{2}$, $f(n+1) = \sqrt{2 f(n)}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम 2 पर अभिसरित होता है । **20**

(ब) निम्नलिखित मानों के लिए तीन डिग्री वाले बहुपद को ज्ञात कीजिए : **20**

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	1	0	1	10

इस प्रकार से फलन f(4) का मान निकालिए ।

(a) Show that the sequence defined by $f(1) = \sqrt{2}$, $f(n+1) = \sqrt{2 f(n)}$ converges to 2.

(b) Find the cubic polynomial which takes the following values :

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	1	0	1	10

Hence or otherwise find f(4).